

VÝZNAM GEOMETRIE PRAVOUHLEHO TROJUHLNÍKA PRE TEÓRIU PROPORCIE V ARCHITEKTÚRE: ZLATÝ REZ A JEHO UPLATNENIA

IMPORTANCE OF THE RIGHT-ANGLED TRIPLET GEOMETRY FOR THE THEORY OF PROPORTION IN ARCHITECTURE: THE GOLDEN RATIO AND ITS APPLICATIONS

Partenón na aténskej Akropole v obdĺžniku zlatého rezu
Parthenon on Athens Acropolis in oblong golden section



Foto Photo: Stanislav Darula

The settled life-style in the first centres of civilisation had to satisfy new needs for safe and functional structures regarding town plans, as well as dwelling organisation within restricted a fortified. The street network logically influenced the rectangular plans of houses and monumental buildings like temples, ziggurats and pyramids. Similarly, the water supply and sewage networks with bathing pools, like in Mohenjo-daro in the Indus River valley, document such tendencies. The hygienic and cultural needs in crowded trade and capital centres required by noblemen, priests, working and trading parties were successfully met in rectangular urban schemes culminating in the Roman camp plans or in Greek and Roman atrium houses as recommended by Vitruvius. However, the orientation of streets and buildings toward cardinal points and their surveying set was dependent on the knowledge of right-angled triangles in Sumer and Egypt, e.g. with sides in ratio 3 : 4 : 5 etc. The aesthetic preference evolving towards the golden ratio or section combined the search for

the abscissa division with the rectangular shape determined by diagonals, as well as intersecting triangles. Consequently, such a search for the most pleasing images was finalised by the so-called Kepler triangle as well as by the Pacioli & da Vinci scheme of human measures and in modern times through Corbusier's Modulor. These dimensional proportions were tested later in psychophysical experiments by Fechner, who provided serious psychological proofs of the human preference for the golden section as the relatively most pleasing choice from different rectangular shapes. Unfortunately, current research into the evaluation of architectural proportions, making use of recent real compositions grounded in the methods and abstract tests of architectural psychophysics is still lacking. Thus it is highly worthwhile to initiate investigations and measurement methods evaluating the visual sensations and perceptions of architectural forms and proportions under various daylight conditions and as well as night-time illumination.

Úvod

Na vysokých školách v oblasti architektúry a stavebníctva sa v základných predmetoch matematiky, deskriptívnej geometrie, geodézie, vtyčovania budov či v histórii architektúry a architektonickej tvorby rutinne učia vzorce a zobrazovacie metódy, príklady alebo výsledky projektových riešení na obrázkoch, digitálnych zobrazeniach a často bez toho, aby sa analyzovala ich rozmerová proporcia a skladba či tvaroslovie v realite.

Výskum najvýznamnejších architektonických pamiatok dokazuje, že nevznikli náhodne, bez teoretických úvah a zámerov, bez princípov podložených na matematických a psychofyzikálnych poznatkoch vnímania urbanistického a architektonického priestoru. Vzhľad budov a ich interiérov s humánnou mierkou a s tradíciou či kultúrou v čase ich vzniku bol od nepamäti viazaný na poznatky a skúsenosti výstavby i jej slohové prvky. Už základné poznatky v staroveku a ich analýza so znovuobjavovaním v renesancii až dodnes poskytujú ucelenejší obraz o rozvoji teórie

architektonickej tvorby v súvislosti s pokrokom stavebnej praxe. V tomto príspevku sa obmedzíme na vplyv geometrie na rozmerové parametre proporcie architektonických diel a na význam zlatého rezu.

Základné poznatky z geometrie a vizuálnej orientácie v priestore a čase

Na prahu civilizácie sa v novovznikajúcich mestských centrách dedili skúsenosti a tradičné poznatky predchádzajúcich generácií, ktoré možno stručne zhrnúť nasledovne ^{1/}:

- Pôvodné merania slnečného tieňa pomocou vertikálnej tyče dovoľovali v rovníkovej pravlasti ľudí určovať jednoducho čas, trvanie dňa aj zhruba orientáciu podľa svetových strán. To sa skomplikovalo presťahovaním hlavných starovekých centier do oblastí okolo 30° severných zemepisných šírok v Mezopotámii, v Egypte a v povodí Indusu, kde vznikali štátne organizované spoločnosti.
- Vyžiadalo si to ďalší celoročný výskum slnečných tieňov a dráh jednak pre konštrukciu slnečných hodín a presné určenie dní rovnodennosti

doc. Ing.
RICHARD KITTLER, DrSc.
doc. Ing.
STANISLAV DARULA, CSc.

Ústav stavebníctva
a architektúry SAV
Dúbravská cesta 9
845 03 Bratislava
Slovensko
stanislav.darula@savba.sk
richard.kittler@savba.sk



Obrázok 1 Správne orientovaný letecký pohľad na vykopávky v Mohendžo-daro (27°15' N, 68°17' E) podľa fotografie Dikshita z roku 1935 s komunálnym kúpaliskom

Figure 1 An aerial view of the excavations in Mohenjo-daro (27°15' N, 68°17' E) after Dikshita photo taken in 1935, with the communal bathing pool oriented to the right

Zdroj Source: DIKSHIT, Rao Bahadur: Lectures on the prehistoric civilisation of the Indus valley, Univ. of Madras 1935, <http://www.biblioteca.pleyades.net/arqueologia/worldwonders/md.htm>

a orientácie V – Z, ako aj dní slnovratov i trvania slnečného roka. Zdá sa, že najmä deň rovnodennosti sa stal sviatkom spravodlivej delby dňa a noci, i zrodu života na jar, keď sa kult matky rodu, predtým sošky „Venuše“, nahradil bohyňou Inanna v Sumeri a bohyňou Maat v Egypte. – Delbou práce, špecifikovaním potrieb života a výstavby v mestách sa utvárali podmienky aj na delbu statkov, na ich počítanie a meranie, ich záznam a opis. V Sumeri vzniká systém šesťdesiatkového

počtu, ktorý sa dodnes zachoval pri delení kruhu na 360°, t. j. dňa na dve časti v rovnodennosti 2 x 12 hodín po 60 minút na hodinu a vtedy mesačných cykloch 12 x 30 dní s doplnkom 5 dní v slnečnom roku. Takmer súčasne okolo roku 2800 pred Kristom sa v Egypte zavádzalo číslovanie 1 – 10, 100, 1 000 a 10 000.

– Je zaujímavé, že v rovnakom čase v nových urbanistických centrách údolia Indusu, napríklad v Mohendžo-daro (obrázok 1) je mestská sieť ulíc a domov orientovaná zámerné v osi sever-juh^[2,3], čo zrejme umožnila tzv. indická kosoštvorcová metóda orientácie miest a budov^[4] podľa merania tieňa slnka na kruhu v predpoludní a popoludní (obrázok 2). Tým bola daná aj orientácia vodovodných a kanalizačných rozvodov spolu s verejným kúpaliskom, čo okolo roku 2600 pred Kristom svedčí o hygienickej a kultúrnej úrovni týchto miest.

– Kým vertikálne postavenie tyče alebo steny sa dalo ľahko kontrolovať primitívnym závažím na motúze, ťažšie sa vytyčoval pravouhlý pôdorys budovy. Na tento účel sa oddávna používal povraz s čiarovým alebo uzlovým označením počtu dielikov 3 : 4 : 5, ktorým sa v pôdoryse stavby vytýčil pravouhlý trojuholník (dávno pred Pytagorom). Ako dosvedčuje klinopisná mezopotámska hlinená tabuľka v Britskom múzeu č. BM 34568 boli už známe aj ďalšie obdĺžniky so stranami l a b a diagonálou d v celých jednotkách, ktoré mali pravouhlý tvar, t. j. okrem trojuholníka $b : l : d = 3 : 4 : 5$ aj $5 : 12 : 13$, $8 : 15 : 17$ a $20 : 21 : 29$, respektíve ich násobkov ako $25 : 60 : 65$ alebo $32 : 60 : 68$. Tieto trojuholníky sa považovali za „magické“, t. j. prinajmenšom za obdivuhodné^[5] a ich používanie sa rozšírilo aj v Egypte^[6] o trojuholník 7 : 24 : 25.

Samozrejme, v staroveku sa poznatky spresňovali. Už prvý známy egyptský architekt Imhotep sa preslávil ako stavebník stupňovej pyramídy v Sakkare z kameňa pre faraóna 3. dynastie Džosera. Značný počet vtedajších mastab i majestátny komplex zhromažďovacieho dvora tejto pyramídy so zádušným chrámom bol za murovanou ohradou s obdĺžnikovým pôdorysom 1000/500 „faraónskych“/kráľovských laktov (t. j. 525/262,5 m) s presnou orientáciou J – S^[7]. Podobne presne štvorcové pravé pyramídy v Gize pri Káhire z obdobia rokov 2500 – 2600 pred

Kristom mali dôslednú orientáciu J – S, V – Z. Je zaujímavé, že najväčšie z nich Chufepova (Cheopsova) a Chafreho (Chefrenova) pyramídy majú sklon ihlanových plôch okolo 52° a mnoho ďalších v pyramídových poliach v Gize, v Sakkare a v Abusire majú sklon v rozmedzí 50,5 – 52,5° podľa predpokladaných pôvodných, no menej presných rozmerov. Táto skutočnosť je záhadná najmä preto, že by sa očakávala aplikácia najznámejšieho „magického“ trojuholníka 3 : 4 : 5, ako to Lauer^[8] odhadoval, ale tá by znamenala sklon nad 53°. To provokuje časté podozrenie, že proporčné riešenie týchto pyramíd zámerné sledovalo pomery „božského“ trojuholníka, 1 : $\sqrt{\phi}$: ϕ

kde $\phi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1,618$, ktorý až na prelome

16. a 17. storočia matematicky definoval Johannes Kepler (1571 – 1630) známym dnes Keplerovým trojuholníkom^[9] s rozmermi zlatého rezu.

Zlatý rez ako najkrajšia proporcia umeleckých diel

Už od nepamäti sa predpokladalo, že vizuálne vnímanie scenérie, sôch alebo fasád budov sa viaže na ich rozmery a proporcie. Hoci bočný priestorový a perspektívny pohľad znamená určité skreslenie alebo zbertenie tvaru a objemu telies, vizuálna informácia sa vytvára aj s príspevom podobnosti, návyku i pamäťovou predstavivosťou s vedomím zmenšovania objektov pri ich vzdalovaní. Preto podstatný vplyv vzhľadu má vzájomný pomer rozmerov, ktorý je primeraný „ľudskej mierke“, vyvoláva pocit ľúbivosti a krásna a zodpovedá súčasnému kultúrnemu prejavu doby, ktorý mal značnú úlohu v obdobiach ustálených architektonických slohov.

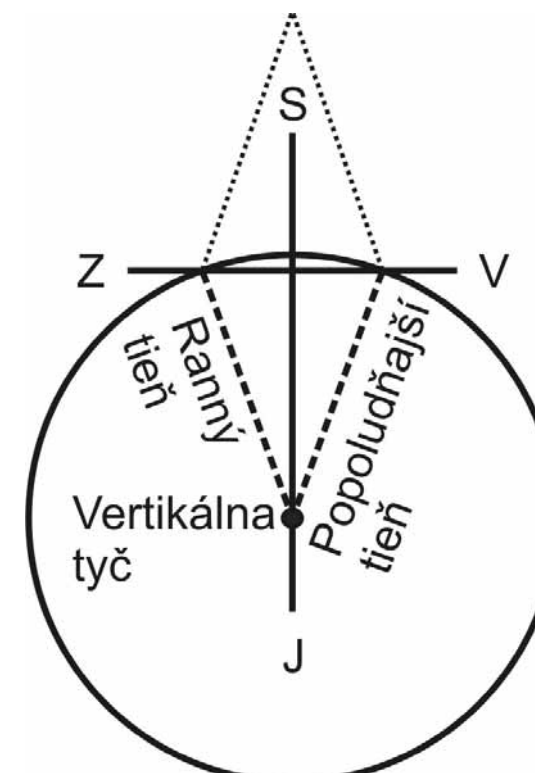
Zdá sa, že už v skorých obdobiach civilizácie podobne ako v rannom detstve človeka sa mnohé vizuálne informácie riadili:

- rozlišovaním predmetov podľa tvaru, obrysu, veľkosti a charakteristických detailov spoločného archetypu,
- až sekundárne podľa momentálnej jasnosti, pohybu, farebnosti a kritériálnych znakov pozorovaných predmetov, keď spolupôsobí aj rýchle tzv. „sakaďické ohmatávanie“ predmetu pozorovania,
- k výsledku a k záverom vizuálneho pozorovania a vnímania prispievajú aj pamäťové predstavy

usporiadania tvarov, ich opakovateľnosť v klasifikácii predmetov podľa minulej skúsenosti.

Predmetom architektonickej proporcie je teda vytváranie viditeľného usporiadania rozmerov a tvarov nového projektovaného diela pomocou voľby vzhľadových, pekne pôsobiacich objemov a opakovaných podobných prvkov v budúcej architektúre budov. Princíp síce jednoduchý, ale vspleti mnohých požiadaviek investora, mecenáša, budúceho užívateľa a náhodných pozorovateľov, je to pre prax veľmi zložitá úloha.

V prvotných podmienkach projektovania a vytyčovania urbanistických usporiadaní miest, účelových i monumentálnych súborov alebo jednotlivých stavieb sa zámer i stavebná realizácia zriedka dokumentovala alebo zachovala, preto sa oveľa neskôr hľadalo, odvodzovalo predpokladané riešenie podľa zámerov pôvodných tvorcov.



Obrázok 2 Indická, tzv. kosoštvorcová metóda orientácie architektúry a urbanistických pôdorysov
Figure 2 The Indian or rhombus method of orientation of architectural and urban plans

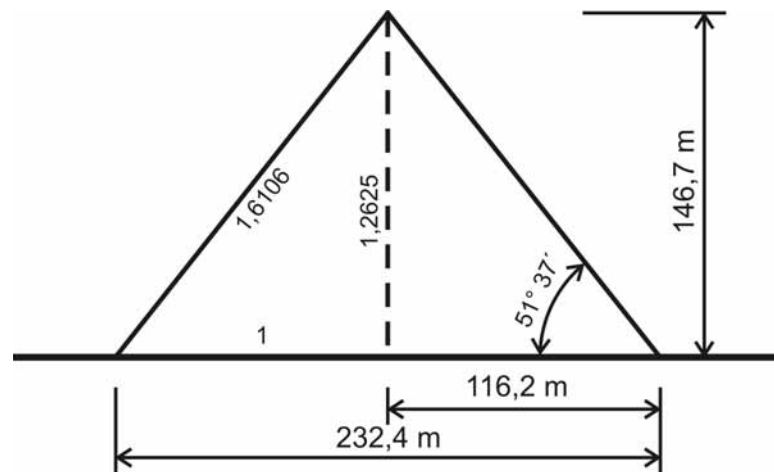
Autori Authors: Richard Kittler, Stanislav Darula

Okrem toho sa musí brať do úvahy aj stavebná zručnosť, historické možnosti a prostriedky stavebnej realizácie a podobne. Napríklad v starom Egypte existovali „tajné poznatky“ len pre vyvolených s titulom „Udržovač tajomstva“, a preto aj staré, no dávno známe poznatky sa dali spísať až oveľa neskôr, ako to dokazuje aj tzv. Rhindov matematický papyrus z rokov 1800 – 1600 pred Kristom, ktorý popisuje štvorce a obdĺžniky (*ifdw* = štvorstranný a štvorhý) aj trojuholníky (*špd* = šeped = špicatý tvar). Tento papyrus je viac ako 1000 rokov mladší ako éra Imhotepa aj pyramídy v Gize. Pyramídy pôvodne symbolizovali stupne a schody, ktoré vedú čím bližšie k slnku (do neba) a ich stupeň (seked) sa musel určiť podľa tradičných egyptských mier. Základnou výškovou mierkou stupňa bol asi „faraónsky“ lakeť (cubit ~ 52,5 cm) a podľa 52° sklonu pravých ihlanových pyramíd mala horizontálna šablóna stupňa asi 5,5 dlane, pričom cubit = 7 dlaní (po 7,5 cm) = 28 palcov (po 1,85 cm). Jednoduchšie povedané pomer stupňa pyramídy bol pravdepodobne v pomere 5,5 : 7 = 0,7857, čo je blízko k zlatému rezu $1 : \sqrt{\phi} = 1 : 1,272 = 0,78615$. Túto skutočnosť si všimá aj ^[10], keď vyzdvihuje seked s pomerom 14/11 = 1,2727, t. j. cubit k 5,5 dlane, ktorý dáva sklon pyramíd zhruba 52°.

Celkové rozmery pyramíd môžu byť trochu odlišné. Napríklad najvyššia Chufeva (Cheopsova) pyramída mala rozmery podľa ^[11], takže v reze jej

Obrázok 3 Rez pyramídou Chufeva (Cheopsa) s rozmermi podľa Zamarovského tabuľky a s proporčnými pomermi podľa zlatého rezu)

Figure 3 Section of the Khufev (Cheops) pyramid with dimensions following the Zamarovsky table, with proportion relations following the golden ratio



Autori Authors: Richard Kittler, Stanislav Darula

trojuholník má pomer 1 : 1,2625 : 1,6106, čo je veľmi blízko pomerom zlatého rezu, t. j. 1 : 1,272 : 1,618 (obrázok 3). Táto zhoda je taká markantná, že hoci mohla vzniknúť bez poznania zlatého rezu, svedčí o citovej intuícii vtedajších architektov a faraónov približiť sa k vzhľadu ideálnej proporcie. Tak sa často uvádza, že až antickí Gréci nazvali zlatým rezom pomer, ktorý sa ľuďom najviac páčil a podľa ich významného sochára a používateľa Feidiassa ho označovali ako ϕ . Od trojuholníkovej predstavy sa často uplatňoval záujem o proporcie fasád, t. j. obdĺžnik, v ktorom len diagonály naznačovali trojuholníky. Ako príklad uplatnenia zlatého rezu sa často uvádza aténsky Partenón v celku aj jeho prvkov, ktorý sa stavala v rokoch 447 – 432 pred Kristom. Okrem diagonály obdĺžnikov a pravouhlých trojuholníkov sa neskôr začalo uvažovať aj o delení úsečky v pomere zlatého rezu.

Proporcie zlatého rezu v matematickom a grafickom vyjadrení

Jednoduché matematické alebo grafické vyjadrenie proporcie má tvar dvoch vzájomných pomerov, t. j. $a/b = c/d$, pričom sa definuje podobnosť alebo porovnateľnosť rozmerov tvaru, ktoré môžu určovať rozdelenie jedného rozmeru úsečky alebo pomer strán obdĺžnika či vzájomný pomer strán v trojuholníku.

Najjednoduchšia predstava architektonickej kompozície založenej na proporčnej súhre prvkov sa dá interpretovať na návrhu dlažby, ktorá sa v jednej rovine skladá z prvkov rôznych veľkostí a rovnakých tvarov. Ak sa majú spájať jednou stranou, je ich pomer špecifický v pomere $a/b = b/c$ a ak zvolíme c ako jednotku, t. j. modul, tak zvyšovaním pomeru $a/b = x$ narastajú mierky v geometrickom rade, t. j. 1, x , x^2 , x^3 atď. To znamená, že zavedením modulu sa dosahuje kompozícia s opakovaním podobných tvarov, čím sa vzájomne zväzujú lineárne dimenzie do vzorky vzťahov matematických proporcií. Len niektoré geometrické rady majú však mnohoraké výhodné kombinácie skladby menších a väčších prvkov, teda majú bohatšie aditívne vlastnosti ako iné kombinácie ^[12].

Historicky za najcennejší a vizuálne najpríjemnejší sa osvedčil rad odvodený od čísla ϕ , ktorý má veľa aditívnych možností, čím sa zvyšujú enormné systémy proporcie so zvláštnou flexibilitou.

Základom je najdôležitejšia postupnosť $1 : \sqrt{\phi} : \phi$, respektíve $1 : \phi : \phi^2$, z ktorých vyplynulo viacero geometrických konštrukcií, ktoré napríklad pozbieral ^[13]. Jednou z najstarších je pravdepodobne grafická metóda rozdelenia úsečky v pomere zlatého rezu založená na podmienke, že dlhšia časť x má byť časťou celej úsečky a a súčasne v pomere k menšej, teda k zostávajúcej časti $a - x$, čiže $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} = 1,618$. Aby sme určili neznámy rozmer x , dostávame kvadratickú rovnicu $x^2 + ax - a^2 = 0$, z toho $x = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2} = 0,618034 a$. To znamená, že

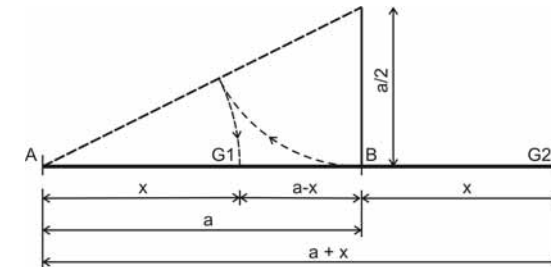
súčasne platí $\frac{a}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{0,618034} = 1,618$.

Ak celková úsečka má jednotkový rozmer, t. j. $a = 1$, bude jej rozdelenie podľa zlatého rezu $1 = 0,618 + 0,382$, alebo pre ľubovoľný rozmer $a = 0,618 a + 0,382 a$

Ak však najkratší úsek má byť jednotkový, tak sa ich pomer zmení na $\phi : \sqrt{\phi} : 1 = 1,618 : 1,272 : 1$, čiže ak $a = 1$ je $\phi = 1 + x$, no súčasne platí aj pomer $\sqrt{\phi^2} : \sqrt{\phi} : 1 = \sqrt{2,618} : \sqrt{1,618} : 1$, pretože $a = 1/0,382 = 2,618$. Tieto pomery definujú však nie rozdelenie úsečky v proporcii zlatého rezu na x a $a - x$, ale prídanie úseku zlatého rezu k pôvodnej úsečke, t. j. $a + x$, pričom keď $a = 1$ bude $1 + x = \phi$. (obrázok 4) Tento pomer medzi ϕ a x identifikuje body G buď vnútri úsečky G1, alebo

vonku G2 aj ich pomerovú proporciu $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$ alebo $\frac{a+x}{x} = 1 + \frac{x}{a-x} = \frac{a}{x} + 1 = 1 + \frac{x}{a-x}$ čiže $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} = \frac{a+x}{a}$.

Ďalej sa v zlatom reze skrýva aj pozoruhodná zhoda matematickej väzby v pravouhlom trojuholníku podľa Pytagorovej vety (670 – 495 pred Kristom), pretože $\phi^2 = (\sqrt{\phi})^2 + 1^2$, respektíve $\phi^2 = \phi + 1^2 = 2,618034$. Teda $\phi = \sqrt{2,618034} = 1,618034$ a ak $a = 1$ je $x = a - 1 = 0,618034$ Navyše ešte pred Keplerom



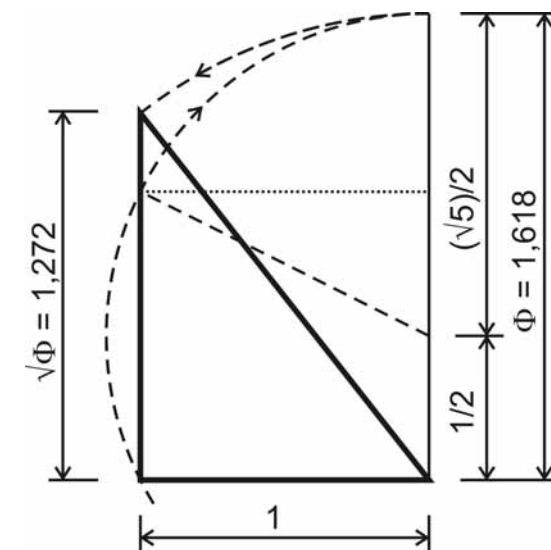
Autori Authors: Richard Kittler, Stanislav Darula

skúmal zlatý rez Fibonacci (1170 – 1250)

a prepísal vzťah $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$ na $\frac{a}{x} \left(1 + \frac{x}{a}\right) = 1$, tak-

že $\frac{a}{\left(1 + \frac{x}{a}\right)} = a \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{n}}}}$, čo je zlo-

mok s tzv. Fibonacciho radom, v ktorom zlomkové členy sa znižujú tak, že ich menovateľ sa zvyšuje podľa súčtu predchádzajúcich celých čísel v slede 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 atď., pričom tu vystupuje zlomkový rad 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21 atď.



Autori Authors: Richard Kittler, Stanislav Darula

Obrázok 4 Delenie úsečky v pomere zlatého rezu grafickou metódou

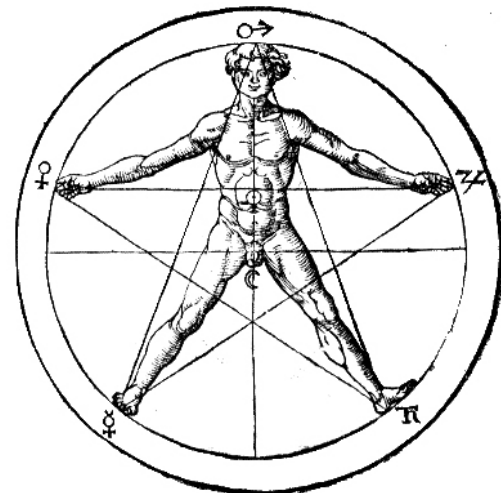
Figure 4 The division of an abscissa in the relation of the golden ratio using a graphic method

Obrázok 5 Pomer strán Keplerovho trojuholníka a jeho grafická konštrukcia

Figure 5 The ratio of sides in the Kepler triangle with its graphic construction

Ako sme už spomínali, Kepler doplnil aj grafickú interpretáciu zlatého rezu v trojuholníkovom variante, (obrázok 5) ale upozornil aj na ďalšiu pozoruhodnosť, že obvod štvorca so stranou $a = 4r$, kde r je polomer kružnice $\pi r \phi$, je takmer totožný s obvodom kružnice, takže sa dá určiť približná hodnota $\pi \approx 4/\sqrt{\phi} \approx 4/1,272 \approx 3,1446055$, čo pri bližne zodpovedá dnešnej presnej hodnote $\pi = 3,14159265$. Túto hodnotu až na 20 miest spresnil až v roku 1596 Ludolph van Ceulen, a preto sa nazýva Ludolfovo číslo. V súvislosti s určovaním parametrov kružnice a gule sa s hodnotou π podrobne zaoberal už Archimedes (287 – 212 pred Kristom), ktorý ju odvodzoval z 96 uholníka opísaného a vpísaného do kruhu s výsledkom hodnôt medzi $223/71 = 3,140845$ a $220/70 = 3,14286$. Novšia hodnota s presnosťou 6 desiatinných miest v tvare zlomku je $355/113 = 3,14159292$. Túto hodnotu odporúčal už v roku 1573 vtedy študent Valentin Otho, neskôr profesor matematiky na Wittenbergskej univerzite. Dnes počítačovo určená hodnota má až desať trilión čísiel za trojkou.

Samozrejme, tieto historické matematické súvislosti a hádanky boli vždy menej pochopiteľné pre umelcov a architektov, preto sa používali ich graficky zobrazené vzťahy na (obrázok 4), alebo priamo mierky pomerov 1,618 : 1,271 : 1 alebo 1 : 0,618 : 0,382.



Obrázok 6 Prekrytie schémy ľudského tela kruhom podľa Agrippu z roku 1551

Figure 6 Covering the human body with a circle according to Agrippa, dated 1551

Zdroj Source: AGRIPPA, Henric Cornelius, 1551. De occulta philosophia libri tres

Najvýznamnejšie výskumy v oblasti psychofyziky robili v 19. storočí Weber (1795 – 1878) a Fechner ^{14/}, ktorý sa osobitne venoval aj experimentálnej estetike a proporciám zlatého rezu ^{15/}. Ako prvý realizoval premyslený experiment s významným počtom pozorovateľov (228 mužov a 119 žien, respektíve 150 mužov a 95 žien) pričom zisťoval na 10 obdĺžnikoch s rôznym pomerom výšky a dĺžky (v/d) papierov na čiernej tabuli ich najpríjemnejší a najškaredší pomer. Viac rokov v pravidelnej zámene pomerov $v/d = 1/1$ (štvorec), $6/5$, $5/4$, $4/3$, $29/20$, $3/2$, $34/21$ (čo je 1,619, cca zlatý rez), $29/13$, $2/1$ a $5/2$ dostal ako najpreferovanejší a „najnoblesnejší“ pomer $34/21$ v prvom experimente, pričom nik ho neodpisal ako najškaredší v druhom ^{16/}. Fechnerove hodnotenia u nás uviedol v prehľadnom diagrame svojej knihy Beisetzter ^{17/} podľa ^{15/}. Fechner uvažoval aj o aplikácii rôznych tvarov v architektúre, t. j. zlatý rez pre domy, vráta a okná, ale súčasne navrhuje zohľadniť aj utilitárne kritériá pre projektovanie tak, aby sa súčasne realizovala pekná a zdravá tvorba pre rozvoj ľudstva. Ďalší sofistikovanejší psychofyzikálny výskum zlatého rezu pri súčasných pochybnostiach o jeho význame sa asi nerobil ^{18/}, hoci čiastkové psychofyzikálne pokusy o overovanie preferencie zlatého rezu pri delení úsečiek ^{19/} aj na obdĺžnikoch ^{20/} sa v malom rozsahu uskutočnili s nejednoznačným výsledkom.

Najvýznamnejšie aplikácie proporcie zlatého rezu v architektúre

Zdá sa, že k proporciám zlatého rezu sa približovalo ľudstvo už dávno, písomné zmienky sú však až od Euklida (309 pred Kristom), ktorý ho definoval vo svojich „Elementoch geometrie“ a dokonca aj ho použil pri zostrojení pravidelných päťuholníkov a desaťuholníkov. To znamená, že už Euklides zistil vzťah pentagonu a možno aj päťcípovej hviezdy s trojuholníkmi zlatého rezu ako ich grafiku uvádza dnes Knott ^{13/}.

Vitruvius (13 pred Kristom, 1487) ^{21/} v najstaršej učebnici architektúry upozorňoval na ľudské miery budov, pričom rímske miery boli tiež založené na proporciách ľudského tela v slede 1 palec (= 1,85 cm), 4 palce (= dlaň = 7,4 cm), 16 palcov (= stopa = 29,6 cm), 24 palcov (= lakeť = 44,4 cm), 80 palcov (= dvojkrok = 74 cm), 96 palcov (= výška človeka = 177,6 cm). Súčasne

v tretej knihe zdôraznil modulovú skladbu a kompozičné pojetie stavby s rešpektovaním proporcií ľudskej postavy, kde:

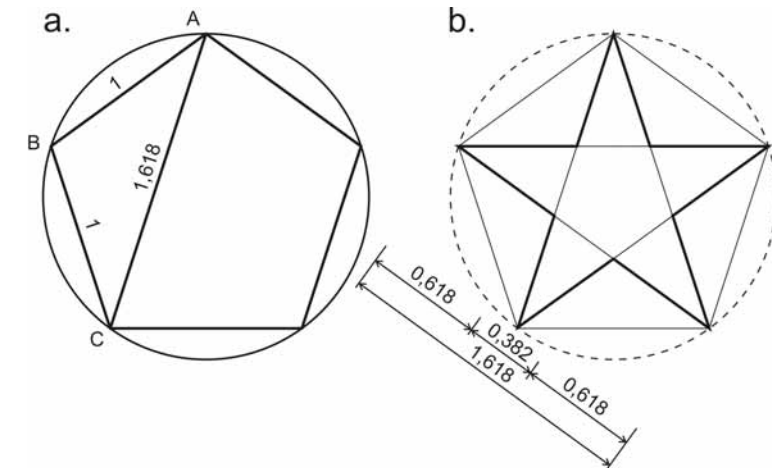
- za prirodzený stred tela považoval pupok 1/2 výšky tela,
 - hrud a ruka sú v 1/4 výšky postavy,
 - lakeť, ako aj temeno hlavy od hrude, sú vo 1/4 výšky postavy,
 - chodidlo je zhruba rovné 1/6 výšky tela.
- Osobitne popisuje rozmery tváre a hlavy, pričom od temena po bradu je 1/8 výšky a obličaj od brady po korenky vlasov má výšku 1/10 výšky tela.

Súčasne slovnou naznačil aj charakteristiku ležiacej postavy s rozťahanými rukami a nohami s pôdorysne opisujúcim kruhom so stredom na pupku, ale aj štvorec s uhlopriečkovým stredom na prirodzení. Tieto pôvodne pôdorysné prirovnania o viac ako 1500 rokov neskôr svojimi známymi kresbami otočil da Vinci do pohľadu a tak vložil do Paciolovej knihy ^{22/}.

Až v renesancii, pravdepodobne Leonardo da Vinci (1452 – 1519) zaviedol termín „zlatý rez“, tak ako ho už predtým uviedol Alberti ^{23/} v jeho desiatich knihách o architektúre. Pacioli ^{24/} podrobnejšie študoval a velebil zlatý rez ako „božskú proporciu“ vo svojej monografii, kde vyslovil aj názor, že „bez matematiky niet umenia“. Pritom netreba zabúdať na jeho dlhoročnú spoluprácu s da Vincim, keď vznikla aj štúdia *Proporcie a anatomia ľudského tela* ^{25/}, ktorá je známa grafickým umiestnením ľudskej postavy do kruhu (obrázok 6). Pacioli upozornil na výskyt pomerov zlatého rezu na pentagone (pravidelnom päťuholníku na obrázku 7a) a na pentagrame (päťcípovej hviezde na obrázku 7b), kde ku všetkým jednotkovým stranám tvoria uhlopriečky pomer dĺžok $AC = 2 \cos(36^\circ) = 1,618$ a tiež je zaujímavý vzťah, že rozdiel uhlopriečky AC a strany AB sa rovná zlomku 1 lomeno uhlopriečka $1/AC$, čiže

$$AC - AB = 1/AC, \text{ alebo } \phi - 1 = \frac{1}{\phi} = 0,618, \text{ čo platí}$$

všeobecne. Hviezdicové a špirálové varianty proporcií zlatého rezu sa viac uplatňujú vo výtvarnom umení ako v urbanizme a architektúre. Historicky sa mnohé realizované proporčné zásady zlatého rezu aplikovali napríklad aj pre rozetové okná v gotike, špirálové prvky a špirálovo narastajúca postupnosť zvýrazňovaná v baroku a rokoku, keď



Autori Authors: Richard Kittler, Stanislav Darula

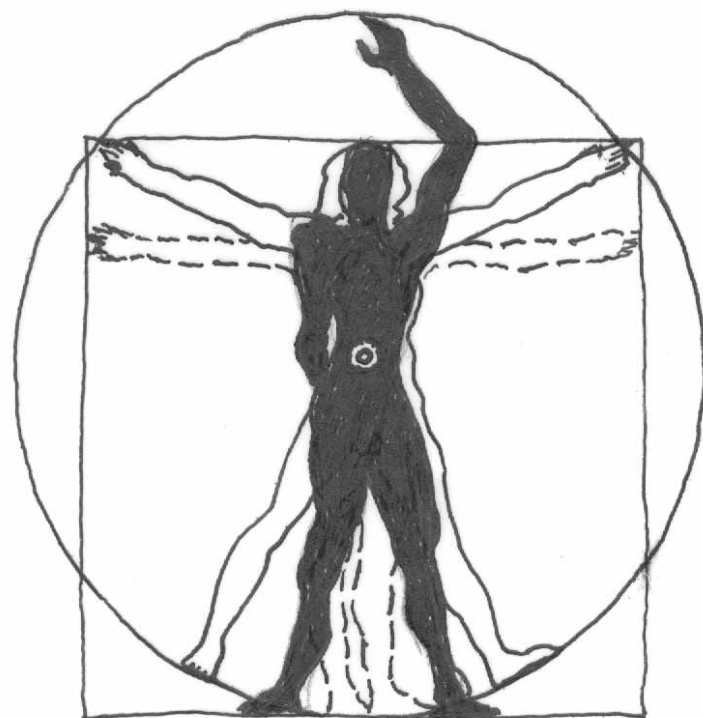
Obrázok 7 Zlatý rez v schéme rovnoramenného trojuholníka ako súčasťou pentagonu a pentagramu

Figure 7 Golden ratios in the dimensions of the pentagon and pentagram

gradácie prvkov architektúry v detailoch i v celku mali základ v tejto proporcii.

Kým Vitruvius, da Vinci s Paciolim sa snažili definovať postavu človeka z hľadiska typológie architektúry ako archetyp, t. j. model, ktorý predstavuje znaky, tvar, miery aj proporcie vyjadrujúce priemer, Dürer (1471 – 1528) ako maliar, rytec, tlačiar, matematik a teoretik bol zakladateľom antropometrie, keď s nemeckou dôslednosťou skúmal antropologické rozdiely mužských a ženských postáv, ich odlišnosti v mierach a proporciách. Z dlhoročných meraní okolo 200 – 300 osôb zvolil najprv päť, potom ďalších osem rôznych typov postáv, ktorých telesné časti vyjadril pomerom ku výške tela podobne ako Vitruvius. Neuznával Albertiho „ideálnu krásu“ a zdôrazňoval jej relatívnosť vo variabilnosti aj od závislosti na dobových trendoch. V Dürerovej knihe ^{26/}, ktorú vydala jeho manželka po jeho smrti, je aj esej o estetike, kde sa zaoberá aj kreatívnym procesom tvorby na základe kritérií užitočnosti, funkčnosti a zámeru ľúbivosti diela.

Na túto tradíciu nadviazala aj teória proporcie v modernej architektúre 20. storočia. Už Le Corbusier (1887 – 1965) si uvedomil, že po druhej svetovej vojne bude treba na rekonštrukciu a obnovu zničených miest zaviesť masovú výstavbu oslobodenú od starých stereotypov tehly a liatinových skeletov, a vyhnúť sa problémom, ktoré



Obrázok 8 Corbusierova predstava proporcií typického človeka

Figure 8 Corbusier's image of the typical human proportions

Autori Authors: Richard Kittler, Stanislav Darula

naznačovali prvé mrakodrapy v USA, napríklad v Chicagu a Buffale.

Predchádzajúce svetové výstavy z roku 1851 v Londýne, kde slágram bol Krištáľový palác z veľkoplošných zliatinových konštrukcií so zasklením, ďalšia výstava v Paríži v roku 1889 sa prezentovala Eiffelovou vežou s výškou 300 m, naznačovali budúce trendy výškovej zástavby miest a mrakodrapov z moderných materiálov. Nová konštrukčná a materiálková báza modernej architektúry mala využívať možnosti vystuženého liateho betónu takmer ľubovoľných tvarov, ako to ukázal Le Corbusier na stavbe unikátnej kaplnky Notre Dame du Haut v Ronchamp. Naopak, v masovej výstavbe obytných budov s využitím mechanizácie a modulovej koordinácie v priemyselnej výrobe i pri montáži veľkorozmerných panelových prvkov sa žiadal nový systém rozmerov, proporcií aj

modulovej súhry. Zdá sa, že Le Corbusier pochopil tieto budúce trendy^{127/}, a preto hľadal nové stupnice proporcií založené na stavbe ľudského tela a súčasne nové využitie zlatého rezu. Na rozdiel od da Vinciho proporcií ľudského tela pri rozpažení s naznačením štvorca, Corbusierova postava so zdvihnutou rukou pokryla vertikálu da Vinciho kruhu so stredom v pupku (obrázok 8). Dôraz na výšku prefabrikátov tkvel vo funkcionalistických princípoch priestorovej racionálnosti, funkčnej a tvarovej jednoduchosti s cieľom konštrukčnej hospodárnosti i s rešpektovaním nárokov života užívateľov interiéru.

Hlavným príkladom analytickej metódy tvorby proporcií Le Corbusiera bol jeho Modulor^{128/}, ktorý pre štandardizáciu všetkých predmetov určených na výstavbu navrhoval dva systémy modulov nadväzujúcich na mieru ľudskej postavy so zdvihnutou pažou do výšky 2,26 m ako modré moduly. Kým Vitruviov štandard výšky človeka bol 96 rímskych palcov, t. j. 177,6 cm, Corbusierova postava bola takmer rovnaká, t. j. $226 : \sqrt{\phi} = 226 : \sqrt{1,618} = 226 : 1,272 = 177,67$ cm.

Ako dokumentuje uplatnenie zlatého rezu aj v modernej architektúre Corbusierom, tento prístup je stále aktuálny a v literatúre sa predpokladá jeho využitie aj naďalej^{129/}.

Podobne ako da Vinciho postava s roztriahnutými pažami a nohami rozmerovo indikovala väzbu na kruh, štvorec a päťcípú hviezdu, bol typový človek Corbusiera výškovo definovaný pomocou konštant zlatého rezu na obidva tieto geometrické útvary, z čoho vyplývali modré (kruhovú) a červené (štvorcové) modulové systémy. Súčasne architektúra vo veľkom používa modulovú skladbu väčších konštrukcií, najmä prefabrikované dielce stien, kým vodorovné stropy a strechy sú častejšie vystužované na stavbe a zhotovené z dovezeného liateho betónu do prefabrikovaného debnenia. Takáto výstavba berie do úvahy viac rozmerovú koordináciu panelových modulov (výšku podlažia a pôdorysné rozmery interiérov) ako proporčno-estetické hľadiská a kritériá zlatého rezu.

Záver

Napriek tomu, že v poslednom čase sa ozývajú aj pochybnosti^{130/} o historickom vývoji

a aplikácii proporcie zlatého rezu, je zrejmé, že proporcie v rozmeroch, tvaroch a usporiadaní objemov a priestorových celkov v urbanizme a architektúre podliehajú funkčným, hospodársko-ekonomickým, materiálovo-výrobným možnostiam aj estetickým potrebám ľudí. V tomto kontexte sa oddávna hľadali aj geometrické a matematické vyjadrenia skladby konštrukcií, architektonických prvkov a ich celkov v koordinovanej hospodárnej projektovej príprave a dokumentácii tak, aby sa ustaloval ich najideálnejší vzhľad s cieľom vizuálne najprívetivejšieho dojmu. V tomto smere je tiež snaha nadväzovať na tradičné systémy proporcií v určitých slohových obdobiach a na ich aplikáciu v nových podmienkach tvorby.

V takýchto historických súvislostiach sa rozvíjalo aj chápanie geometrie slnečných lúčov a ich tieňov pre orientáciu architektonických monumentov i pôdorysov miest, tak sa aplikovali pravouhlé trojuholníky na tvorbu pravouhlého rastra horizontálnych a vertikálnych plôch a pôdorysov až po modernou výrobou stimulovaný systém modulových prvkov menších či väčších objemov i architektonických celkov. Tu všade sa uplatnil aj zlatý rez ako delenie úsečky, trojuholníka, obdĺžnika, päťuholníka i špirály v takých obdviuhodných závislostiach a skladbách, že zaujal výtvarníkov, architektov, matematikov a dokonca aj astronómov.

Ak sa však odporúča teória architektúry zakladá na vizuálnom vneme a estetickom dojme z vonkajšieho vzhľadu architektonického priestoru a jeho ohraničenia alebo z prostredového pôsobenia jej interiérov, tak sa nemôže obmedziť len na ich rozmerový, geometrický alebo modulový raster. Treba si uvedomiť, že nielen postava človeka, ale zrakové „pokrytie“ prináša takmer

nekonečný rozsah vnímania prírodného prostredia vókol pozorovateľa alebo užívateľa architektúry. To znamená, že psychofyzikálny výskum by mal pomocou väčšieho počtu pozorovateľov preskúmať dve najdôležitejšie situácie:

1. Subjektívne hodnotenie proporcií a estetickej kvality vonkajšieho vzhľadu architektúry pri pohybe vzpriamenej postavy v podmienkach denného osvetlenia (slnkom a oblohou) i večerného umelého nasvetlenia, respektíve utilitárneho bežného uličného osvetlenia. Dajú sa použiť metódy psychofyziky pomocou slovného hodnotenia v stupniciach prídavných mien alebo aj grafické, kresbové náčrty, pričom sa musia zohľadniť aj vizuálne skreslenia pomerov architektonických objektov^{131/}.

2. Oveľa zložitejšie sa hodnotia proporcie interiérových priestorov, pretože podľa ich účelu sa interiér zriedka pozoruje len postojácky či vnútri alebo pri výhlade z okien (napríklad v obrazárni, múzeu, v nádražnej alebo letiskovej hale a pod.), no častejšie je príznačné len vnímanie pozadia interiéru pri určitej zrakovkej práci v sede (napríklad v kancelárii pri čítaní a písaní na stole na obrazovke počítača, v škole, v obývačke a pod.). Podmienky denného alebo umelého či združeného osvetlenia interiéru vytvárajú aj špecifické problémy pohybu očí, ich zrakového uhla^{132/}, vnímania, akomodácie, adaptácie aj oslnenia zraku.

Jedine takýto základný výskum by mohol priniesť nové poznatky pre vedecké základy teórie proporcií a vizuálnej pohody v architektonickom priestore a v životnom prostredí, ktoré ovplyvňuje.

Výskum spojený s touto štúdiou podporuje Vedecká agentúra VEGA na základe zmluvy číslo 2/0029/11.

v pôdoryse, ktoré musia indikovať dopad slnečných lúčov od juhu. Takáto pretočená fotografia bola od roku 1935 mnohonásobne reprodukováaná a doteraz sa nachádza aj na webe.

NOTES POZNÁMKY

¹ KITTLER, Richard – KOCIFAJ, Miroslav – DARULA, Stanislav: Daylight Science and Daylighting Technology. New York, Springer 2012, s. 20.

² Pôvodná letecká snímka bola publikovaná Dikshitom otočená o 180°, čo je zrejme zo slnečných tieňov

³ DIKSHIT, Rao Bahadur: Lectures on the prehistoric civilisation of the Indus valley. Univ. of Madras 1935, <http://www.bibliotecapleyades.net/arqueologia/worldwonders/md.htm>

⁴ KITTLER, Richard – DARULA, Stanislav: Historická dôležitosť solárnej geometrie pre orientáciu v čase, priestore a v architektúre. *Architektúra & urbanizmus*, 42, 2008, 3 – 4, s. 159 – 165.

⁵ NEUFERT, Ernst: *Bauordnungslehre: Beauftragter für Normungsfragen des Generalbau-inspektors*. Berlin, Bertelsmann Fachverlag 1943.

⁶ ROSSI, Corina: *Architecture and mathematics in ancient Egypt*. Cambridge, University Press 2007.

⁷ KITTLER, Richard – DARULA, Stanislav: Applying solar geometry to understand the foundation rituals of 'Old Kingdom' Egyptian pyramids. *Architectural Science Review* 51, 2008, 4, s. 407 – 412.

⁸ LAUER, Jean Philippe: Le triangle sacré dans les planes des monuments de l'Antic Empire. *Bulletin de l'Institut Francaise d'Archeologie Orientale*, 77, s. 53 – 78, 1977.

⁹ Trojuholník zlatého rezu podľa Keplera definuje súčasne kvadratická rovnica $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ ako aj Pytagorov pravouhlý trojuholník $\phi^2 = (\sqrt{\phi})^2 + 1^2$ pričom dopĺňa sadu egyptských trojuholníkov o špeciálny prípad, pretože dĺžky Keplerovho trojuholníka ϕ a $\sqrt{\phi}$ s nepatrnou odchýlkou súčasne zodpovedajú:

– s aritmetickým priemerom

$$A = (\phi + \sqrt{\phi}) / 2 = (1,618 + 1,272) : 2 = 1,445$$

– s geometrickým priemerom

$$G = \sqrt{\phi \sqrt{\phi}} = \sqrt{1,618 \times 1,272} = 1,435$$

– s harmonickým priemerom

$$H = 2 / \left(\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\sqrt{\phi}} \right) = 2 / \left(\frac{1}{1,618} + \frac{1}{1,272} \right) = 1,424$$

¹⁰ ROSSI, Corina: *Architecture and mathematics in ancient Egypt*. Cambridge, University Press 2007, s. 217.

¹¹ ZAMAROVSKÝ, Vojtěch: *Jejich veličenstva pyramidy*. Praha, Čs. spisovatel 1986.

¹² SCHOLFIELD, Paul H.: *The theory of proportion in architecture*. Cambridge, University Press 1958.

¹³ KNOTT, Ron: *Two-dimensional geometry and the golden section or fascinating flat facts about Phi*. 2009

– 2011. <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/phi2DGeomTrig.html>

¹⁴ FECHNER, Gustav Theodor: *Elemente der Psychophysik*. Leipzig, Breitkopf & Hartel 1860.

¹⁵ FECHNER, Gustav Theodor: *Vorschule der Easthetik*. Leipzig, Breitkopf & Hartel 1876.

¹⁶ FECHNER, Gustav Theodor: *Vorschule der Easthetik*. Leipzig, Breitkopf & Hartel 1876, s. 195 – 202.

¹⁷ BEISETZER, Ladislav: *Architektúra ako umenie a veda*. Bratislava, Tatran 1980.

¹⁸ Kritika Markowského z roku 1992, že Fechner mal len 10 vzoriek je pomerne povrchná, odvoláva sa na dielo Fechnera¹⁴ a zrejme jeho knihu o estetike nepoznal. Jeho amatérske snahy o experimenty so šiestimi obdĺžnikmi majú z hľadiska experimentálnej psychofyziky značné nedostatky, keď nezáväzne dával dotazníky poslucháčom v priebehu svojej pochybovačnej prednášky alebo ovplyvneným príslušníkom vlastnej rodiny. Pozri: MARKOWSKY, George: Misconceptions about the Golden Ratio. *The College Mathematics Journal* 23, 1992, 1, s. 2 – 18.

¹⁹ SCHIFFMAN, H. R. & BOBKO, D. J.: Preference in linear partitioning: The golden section reexamined. *Perception and Psychophysics* 24, 1978, 1, s. 102 – 103.

²⁰ SCHIFFMAN, H. R.: Figural preference and the visual field. *Perception and Psychophysics*, 6, s. 92 – 94, 1969.

²¹ VITRUVIUS, Marcus Poljo: *De architectura libri decem*. Roma 13 BC, 1487. Český preklad: Deset knih o architektúre. Praha, Svoboda 1979.

²² Z tohto historického pohľadu bolo uvedenie da Vinciho proporčnej schémy na obrázku 16 v českom preklade Vitruviovej knihy mylne a zavádzajúce.

²³ ALBERTI, Leon Battista: *De re aedificatoria*. Roma, 1452. Anglický preklad: *On the art of building in ten books*. Cambridge, Mass. MIT Press 1988.

²⁴ Františkánsky mních Luca Bartolomeo de Pacioli (1445 – 1517), vtedy prominentný matematik, býval

a spolupracoval s Leonardom da Vincim v Miláne od roku 1493 až do roku 1506. Bol len o sedem rokov starší od Leonarda, ktorý sa od neho priučal matematike, pretože už pred ich stretnutím mal jeho učebnicu „Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita“, ktorú si objednal hneď po jej vydaní Nardini (1974) pozri vydanie z roku 1990. V spoločných diskusiách a s da Vinciho obrázkami vyšla Pacioliho kniha o božskej proporcii, kde publikoval aj preklad spisu Piera della Francesca o piatich pravidelných telesách a perspektíve, pričom časť použil aj v predchádzajúcej učebnici, za čo bol obvinený z plagiatstva vtedajšou autoritou histórie umenia Giorgiom Vasarim (1511 – 1574), neskoršie aj životopiscom da Vinciho. Podľa tradície da Vinci nakreslil aj proporcie ľudskej postavy v kruhu s vpísaným pravidelným päťuholníkom, ako to ukázal Agrippa v knihe AGRIPPA, Henric Cornelius: *De occulta philosophia libri tres*. 1551. Medzitým Alberti (1404 – 1472) ako teoretik architektúry a pokračovateľ Vitruvia napísal novú renesančnú učebnicu architektúry²³, v ktorej ju pokladal za snaženie vytvoriť priestor s ideálom krásy. Uvedené v: PACIOLI, Luca: *De divina proportione*. Venice 1509. Anglický preklad H. E. Huntleya „The Devine Proportion“. New York, Dover Publ., 1970, francúzsky preklad G. Duschene a M. Giraud, *Libr. du Compagnonnage* 1980; NARDINI, Bruno: *Vita di Leonardo*. Firenze, Giunti e Centro Internazionale del Libro 1974. Slovenský preklad A. Škorupovej, Bratislava, Tatran 1990.

²⁵ NARDINI, Bruno: *Vita di Leonardo*. Firenze, Giunti e Centro Internazionale del Libro 1974. Slovenský preklad A. Škorupovej, Bratislava, Tatran 1990, s. 158 a 211.

²⁶ DÜRER, Albrecht: *Vier Bücher von menschlicher Proportion*. Nürnberg, Agnes Dürer Verlag 1528, 1532.

²⁷ LE CORBUSIER/JEANNERET, Charles Édouard: *Towards a new architecture*. London, Architectural Press 1946.

²⁸ LE CORBUSIER/JEANNERET, Charles Édouard: *The Modulor: A harmonious measure to human scale, uni-*

versally applicable to architecture and mechanics. Basel & Boston, Birkhäuser 2004.

²⁹ Pozri napríklad: BANGS, Herbert: *Návrat posvätné architektury. Zlatý rez a koniec modernizmu*. Praha, Levné knihy 2008.

³⁰ Niektorí matematici, napríklad Markowsky (1992) alebo Falbo (2005) zvyknúť na veľkú presnosť aproximácií úplne nesúhlasia s extrémnym prehlasovaním zlatého pomeru ako „svetovo najprekvapujúceho čísla“, napríklad Livio. Falbo súhlasí však v svojom závere, že „možno ϕ si zaslúži byť na zozname s e, π a inými číslami, pretože zjednodušuje určité vzorce a v tomto zmysle je zaujímavé, ba snáď veľmi zaujímavé ale nie úplne prekvapujúce“. Pozri aj: MARKOWSKY, George: Misconceptions about the Golden Ratio. *The College Mathematics Journal* 23, 1992, 1, s. 2 – 18; FALBO, Clement: A Golden Ratio: a contrary viewpoint. *The College Mathematics Journal* 36, 2005, 2, s. 123 – 134; LIVIO, Mario: *The Golden Ratio: The story of Phi, the world's most astonishing number*. New York, Broadway Books 2002.

³¹ KITTLER, Richard: Vizuálne pôsobenie hlavných rozmerov v architektonickom priestore a rôznych formách jeho zobrazenia. *Architektúra & urbanizmus*, 2, 1968, 4, s. 33 – 45.

³² Je zaujímavé, že napriek tomu, že sa rozmerové proporcie ľudského tela týkajú najmä vizuálneho vnímania priestoru málo sa venovala pozornosť výške očí stojacej, pohybujucej sa alebo sediacej postavy. Podľa Vitruviovho popisu tváre je poloha očí od brady vo výške zlatého rezu, t. j. 0,618 a ku koreňu vlasov 0,382 výšky tváre. Ešte významnejšie je, že zhruba z tohto bodu vnímame detaily v priestorovom uhle 1,5°, celé predmety v zornom uhle 60° a periférne takmer celý polopriestor vpredu a pri otočení hlavy aj vzadu nielen nablízku ale i v diaľke. Tak človek môže pozorovať celý priestor vďaka tvaru a proporciám povrchov, telies, prostredie prírody aj architektúry v nej. Pozri napríklad: KITTLER, Richard – KOCIFAJ, Miroslav – DARULA, Stanislav: *Daylight Science and Daylighting Technology*. New York, Springer 2012.